

# 磁场强度公式 $H=H_0 e^{-\alpha x}$ 的边值条件 及分离变量法的理论推导

南方冶金学院 彭会清

• 提要 • 磁场强度随着离磁极的距离增加,而按指数关系显著减小的公式  $H=H_0 e^{-\alpha x}$ , 在弱磁场磁选设备理论设计中,对磁系的极距、极数、磁场强度等的确定起重要的作用。原理论推导中没有指明其边值条件,将该式作为全体开放型平面磁系的磁场强度的方程式(1),其实并不然。本文主要阐述  $H=H_0 e^{-\alpha x}$  的边值条件及分离变量法的推导过程。

## 一、 $H=H_0 e^{-\alpha x}$ 的边值条件

原推导中提出,满足拉普拉斯方程的共轭函数  $\ln H$  和  $x$ , 有一个可能的解,

$$\begin{cases} \frac{\partial (\ln H)}{\partial x} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial (\ln H)}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

式中,  $H$ —磁场强度  $\vec{H}$  的模,  
 $\alpha$ — $\vec{H}$  与  $x$  轴的夹角。

进而得出指数公式。下面用复变函数法推导其实现的边值条件。

原推导结果,

$$H = H_0 e^{-\frac{\pi}{s} x}, \quad \alpha = \frac{\pi}{s} y \dots\dots\dots (2)$$

式中:  $H_0$ —磁极表面中心点的磁场强度之模,

$e$ —自然对数底,  
 $s$ —两极中心线间距离。



图1 坐标示意

示。

在该复平面中, 磁场强度矢量,

$$\begin{aligned} \vec{H} &= H \cdot e^{i\alpha} = H_0 e^{-\frac{\pi}{s} x} \cdot e^{i \frac{\pi}{s} y} \\ &= H_0 e^{-\frac{\pi}{s} x} (\cos \frac{\pi}{s} y + i \sin \frac{\pi}{s} y) \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$

当这个场的复磁位函数的实部  $u(x, y)$  用来表示标量磁位函数, 虚部  $v(x, y)$  代表通量函数时, 其磁场强度的共轭复数为(2),

$$\begin{aligned} \vec{H} &= H_0 e^{-\frac{\pi}{s} x} (\cos \frac{\pi}{s} y - i \sin \frac{\pi}{s} y) = H_0 e^{-\frac{\pi}{s} (x + iy)} \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

令  $Z = x + iy$  ( $Z$  为磁系所处的平面符号)

$$\therefore \vec{H} = H_0 e^{-\frac{\pi}{s} Z} \dots\dots\dots (5)$$

由公式  $\dot{H} = -\frac{\partial W}{\partial Z}$  ( $W$  为这个场的复磁位函数)(2)

$$\therefore W = \frac{sH_0}{\pi} e^{-\frac{\pi}{s}Z} + c_1$$

( $c_1$  为常数) ..... (6)

$$\text{即: } u + iV = \frac{sH_0}{\pi} e^{-\frac{\pi}{s}x} (\cos \frac{\pi}{s}y - i \sin \frac{\pi}{s}y) + c_1 \dots \dots \dots (7)$$

所以这个场的磁位函数  $u(x, y)$ , 通量函数  $v(x, y)$  为:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{sH_0}{\pi} e^{-\frac{\pi}{s}x} \cdot \cos \frac{\pi}{s}y + c_1 \\ v(x, y) = -\frac{sH_0}{\pi} e^{-\frac{\pi}{s}x} \cdot \sin \frac{\pi}{s}y \end{cases} \dots \dots \dots (8)$$

对磁位函数  $u(x, y)$  进行讨论, 选磁极间隙垂直中心线磁位为零。

即: 当  $y = \frac{s}{2}$  时,  $u = 0$ 。代入 (8) 式有:

$$c_1 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$$\therefore u = \frac{\pi}{s} H_0 e^{-\frac{\pi}{s}x} \cdot \cos \frac{\pi}{s}y \dots \dots \dots (10)$$

当  $x = 0, y = 0, u = u_0 \therefore u_0 = \frac{s}{\pi} H_0$

当  $x = 0, y = s, u = -u_0$ 。

$$\text{故有: } u = u_0 e^{-\frac{\pi}{s}x} \cos \frac{\pi}{s}y \dots \dots \dots (11)$$

磁极表面是等位线, 当  $u = u_0$  时, 则得磁极表面形状方程:

$$1 = e^{-\frac{\pi}{s}x} \cos \frac{\pi}{s}y \dots \dots \dots (12)$$

$$\left( -\frac{2n-1}{2}s < y < \frac{2n+1}{2}s, \right.$$

$$\left. n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots \dots \right)$$

因此, 磁极表面形状为类似抛物线形。

取两极中心距离  $s = 40$  厘米进行计算, 根据计算结果, 绘出开放型平面多极磁系磁极形状及分布, 如图2所示。

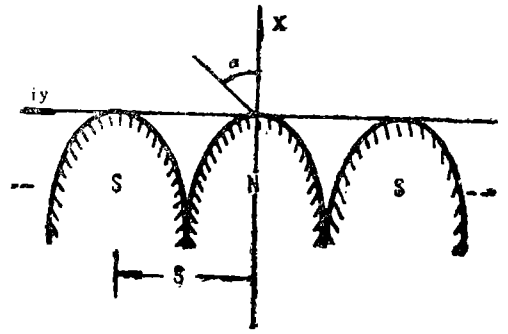


图2 开放多极磁系磁极形状及分布  
S—两极中心线间距离

由场的唯一性原理知, 满足  $\frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{n}H) + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$  和  $\frac{\partial}{\partial y} (\frac{1}{n}H) - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$  这两个条件的平面场, 唯有磁极表面形状由  $1 = e^{-\frac{\pi}{s}x} \cos \frac{\pi}{s}y$  所决定的开放型平面多极磁系才能实现。

## 二、 $H = H_0 e^{-Cx}$ 的分离变量法推导

为使该公式的推导在电磁场理论上更为完善, 下面用分离变量法推导之。

选坐标如图3所示。且设  $Z$  方向不影响场强分布, 则拉普拉斯方程的通解为(3),

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1n} e^{-C_n x} + A_{2n} e^{-C_n x} (B_{1n} e^{iC_n y} + B_{2n} e^{-iC_n y}) + (A_{10} x + A_{20}) (B_{10} y + B_{20})) \dots\dots\dots (13)$$

式中:  $A_{1n}$ 、 $A_{2n}$ 、 $B_{1n}$ 、 $B_{2n}$ 、 $A_{10}$ 、 $A_{20}$ 、 $B_{10}$ 、 $B_{20}$ 均为待定的系数。

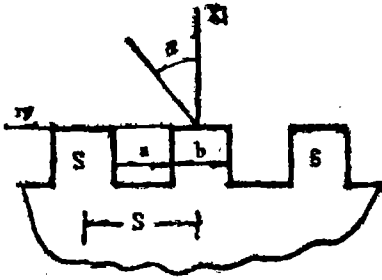


图3 坐标选择示意

a—极间隙宽                  b—极面宽  
s—两极中心线间距离

边界条件:

(1)  $y=0, x \rightarrow \infty, \varphi=0,$

(2)  $x=0, y \rightarrow \infty, \varphi=0,$

(3)  $-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = H_0$   
 $C_n y = m\pi$

( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots\dots$ )

由条件(1)有:  $A_{1n}=0, A_{10}=0,$

$B_{20}=0,$

由条件(2)有  $B_{1n}=0, B_{10}=0.$

故简化后的复变函数可写为:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} e^{-C_n(x+iy)} \dots\dots\dots (14)$$

式中:  $D_{1n} = A_{1n} \cdot B_{1n}$

$\because Z = x + iy,$  式(14)写成:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} e^{-C_n z} \dots\dots\dots (15)$$

由复变函数法, 磁场强度  $\vec{H}$  的共轭复数  $\dot{H}$  为:

$$\dot{H} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n z} \dots\dots\dots (16)$$

$\therefore$  开放型平面多板磁系磁场强度通式为:

$$\vec{H} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n x} (\cos C_n y + i \sin C_n y) \dots\dots\dots (17)$$

其中  $D_{1n}$ 、 $C_n$  为常数,  $n$  不同, 其值也不同, 由相应的边界条件决定。

根据对称性原理:

当  $C_n y = m\pi, m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\dots$  时, 研究在磁系的磁极对称中心

$x$  方向上  $\vec{H}$  的变化, 这时

$$\vec{H}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n x} (-1)^m \vec{e}_x \dots\dots\dots (18)$$

$$H_1 = |\vec{H}_1| = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n x} \dots\dots\dots (19)$$

当  $C_n y = m\pi + \frac{\pi}{2}, m=0, \pm 1, \pm 2,$

$\pm 3, \dots\dots$  时, 研究在磁系的极间隙中心线  $x$  方向上  $\vec{H}$  的变化, 这时

$$\vec{H}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n x} (-1)^m \vec{e}_y \dots\dots\dots (20)$$

$$H_2 = |\vec{H}_2| = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} C_n e^{-C_n x} \dots\dots\dots (21)$$

由式(19)、式(21)可知,  $H_1$  和  $H_2$  在  $x$  值为同一值时相等。取  $n=0$ , 则有:

$$H = H_1 = H_2 = D_{10} C_0 e^{-C_0 x} (C_0 \text{ 记为 } C) \dots\dots\dots (22)$$

# 论 矽 石 充 填 作 用

南方冶金学院 吕楚峙 叶昌鸿

· 提要 · 本文分两部份：一是矽石充填试验。通过夹壁模拟试验，获得采空矿场充填后夹壁强度提高的具体数据。厚夹壁（厚10米以上）充填满时强度可提高9%，充半满时提高0~1%；薄夹壁（厚10米以下）充满时强度可提高24%，充半满时提高14%。因此，建议厚夹壁的空场可以不充，薄夹壁的空场只需充半满。二是矽石充填作用的讨论。通过模拟试验与现场实际的观察，矽石充填有提高夹壁强度，约制岩体移动，防止冲击地压等作用，但其主要作用是减少空体，约制岩体移动范围，把可能发生的大面积地压转化为局部地压，或者消灭地压。

## 一、矽石充填试验

中国南部（江西、湖南、广东）钨矿多数为急倾斜薄脉群钨矿。矿脉、围岩均较稳固， $f = 8 \sim 12$ ，矿脉厚度一般为0.3~0.4米，倾角一般为70°~90°，矿脉间距一般为

5~20米。根据上述矿脉赋存条件，比较适合于留矿法开采。到目前为止，留矿采矿法仍然是钨矿山的主要采矿方法。由于留矿法的特点，在矿石采下放完后，遗留空区，并随着开采时间愈长，空体积累就愈大。在七十年代，一些矿山作过测算，一般100~300万米<sup>3</sup>。空区的分布，随采深而延伸，一般

由边界条件（3）有

$$D_{10}C = H_0 \dots \dots \dots (23)$$

根据  $\begin{cases} Cy = \frac{(2m+1)}{2} \pi, \text{ 当} \\ Cy = m\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \frac{(2m+1)s}{2} \text{ 时 (即在极和极间隙对} \\ y = ms \end{cases}$$

称中心)，则有：

$$C = \frac{\pi}{s} \dots \dots \dots (24)$$

因此证得：

$$H = H_0 e^{-\frac{\pi}{s} x} = H_0 e^{-cx}$$

式中，C—磁场非均匀性系数， $C = \frac{\pi}{s}$ 。

## 三、结语

本文从电磁场理论出发，得出了公式  $H = H_0 e^{-cx}$  的边值条件及分离变量推导法，从而说明了该式作为开放型平面多极磁系磁场强度方程式的局限性，完善了原弱磁场磁选理论。

## 参 考 文 献

- (1) 达秋克等：《磁电选矿》，冶金工业出版社，10—20页。
- (2) 梁昆淼：《数学物理方法》，人民教育出版社，1979年版，230页。
- (3) K. G. 宾斯等：《电场及磁场问题分析与计算》，人民教育出版社，1980年版，93页。